

等 別：三等考試  
類 科：電力工程、電子工程  
科 目：工程數學  
考試時間：2 小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、請求下列微分方程式的解：

$$y'' + 4y = 1 + x + \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad (15 \text{ 分})$$

二、設  $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$ 。

- (一)求解  $A$  的特徵值 (eigenvalue) 與對應的特徵向量 (eigenvector)。(4 分)
- (二)求解  $A^2$  的特徵值與對應的特徵向量。(4 分)
- (三)解  $A^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ 。(7 分)

三、請利用留數 (residue) 計算  $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ 。(10 分)

四、設  $X$  與  $Y$  的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 是

$$f_{XY}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty \\ = 0, \quad x < 0 \text{ 或 } y < 0$$

其中  $\lambda > 0$ 。設  $Z = X + Y$ 。

- (一)求  $Z$  的期望值 (mean)。(5 分)
- (二)求  $Z$  的累積分布函數 (cumulative distribution function)。(5 分)

乙、測驗題部分：(50分)

代號：7344

(一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當答案。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 考慮函數  $\phi(x, y, z) = 2x^2y - yz^2$ ，請決定梯度  $\nabla\phi(x, y, z)$  在點  $(1, -1, 2)$  之值為何？  
 (A)  $-4i + 2j + 8k$       (B)  $-4i - 2j + 8k$       (C)  $-4i - 2j - 8k$       (D)  $-4i + 2j - 8k$
- 若  $\cdot$  為內積運算， $\times$  為外積運算，請計算  $(2i - j) \cdot [(i + 3j - k) \times (3i - k)]$  之值為何？  
 (A)  $-4$       (B)  $-5$       (C)  $-6$       (D)  $-7$
- 圍線積分  $\oint_c y^2 dx + (xy + x^2) dy$  其中  $c$  為由直線  $y = x$  與拋物線  $y = x^2$  所圍成的封閉路徑，利用格林定理 (Green's theorem) 將此積分化成面積分  $\iint_R u(x, y) dx dy = K$ ，其中  $R$  為封閉路徑  $c$  所圍的區域，請問  $u(x, y)$  與  $K$  分別為何？  
 (A)  $u(x, y) = y - 2x$ ， $K = \frac{1}{20}$       (B)  $u(x, y) = 2x - y$ ， $K = \frac{1}{40}$   
 (C)  $u(x, y) = 2x - y$ ， $K = \frac{1}{20}$       (D)  $u(x, y) = y - 2x$ ， $K = \frac{1}{40}$
- 下列那一個向量不在矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$  之列空間 (row space)？  
 (A)  $[3 \ 9 \ 14]$       (B)  $[2 \ 2 \ 2]$       (C)  $[6 \ 15 \ 24]$       (D)  $[1 \ 2 \ 3]$
- 矩陣  $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  經由對角化得  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，下列何者是  $P$  矩陣？  
 (A)  $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$       (B)  $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$       (C)  $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$       (D)  $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
- 假設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ ，計算行列式值  $\det(3A^T) + \det(A^{-1}) = \frac{c}{3}$ ， $c = ?$   
 (A) 18      (B) 28      (C) 244      (D) 234
- 假設  $A$  為  $n \times n$  矩陣，下列那一個敘述不等效 (equivalent) 於其他敘述？  
 (A)  $A$  可被正交對角化 (orthogonally diagonalizable)  
 (B)  $A$  為對稱 (symmetric) 矩陣  
 (C) 可為  $A$  找到或建構  $n$  個正交規範特徵向量 (orthonormal eigenvectors)  
 (D)  $A$  的行列式值  $\det A = \pm 1$
- 下列子集合何者為  $R^3$  的子空間 (subspace)？  
 (A)  $\{(a, b, a + 2b) \mid a, b \in R\}$       (B)  $\{(0, a, a^2) \mid a \in R\}$   
 (C)  $\{(a + 1, a, 0) \mid a \in R\}$       (D)  $\{(a, b, 1) \mid a, b \in R\}$
- 定義  $i = \sqrt{-1}$ ，複變數  $z = x + iy$  與其共軛複數  $\bar{z} = x - iy$ 。下列何者在整個複數平面皆為可解析 (analytic)？  
 (A)  $f(z) = \bar{z}$       (B)  $f(z) = e^y (\cos x + i \sin x)$   
 (C)  $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$       (D)  $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$

- 10 定義  $i = \sqrt{-1}$ ，假設方程式  $z^2 - z + 1 + i = 0$  的兩個解為  $z_1$  與  $z_2$  且  $|z_1| > |z_2|$ ，則下列何者正確？  
 (A)  $z_1 + z_2 = 1 + 2i$       (B)  $z_1 - z_2 = 1 - 2i$       (C)  $|z_1| = 1$       (D)  $|z_2| = \sqrt{2}$
- 11  $f(z) = \frac{z(z-5)(z-i)}{(z+i)^3(z+1)(z-4)^2}$ ，且  $c$  為  $|z| = 3$  逆時鐘轉之封閉路徑，請決定  $\oint_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  之值為何？  
 (A)  $4\pi i$       (B)  $-4\pi i$       (C)  $6\pi i$       (D)  $-6\pi i$
- 12 請利用複數積分決定  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$  之值為何？  
 (A)  $\frac{3\pi}{2}$       (B)  $\frac{3\pi}{4}$       (C)  $\frac{3\pi}{6}$       (D)  $\frac{3\pi}{8}$
- 13 一階常微分方程式  $(Ax^2y^2 + By^3)dx + (2x^3y + 12xy^2 + 5)dy = 0$  為正合 (exact)，A、B 值為何？  
 (A)  $A = 2, B = 3$       (B)  $A = 3, B = 3$       (C)  $A = 3, B = 4$       (D)  $A = 4, B = 3$
- 14 給定微分方程  $(4 - y^2) \frac{dy}{dx} = x^2$ ，當初始值  $(x_0, y(x_0))$  落在下列那一個  $xy$  平面區間時，該微分方程可能不會有唯一解 (unique solution)？  
 (A)  $x \in \mathbb{R}, -2 < y < 2$       (B)  $x \in \mathbb{R}, y < -2$       (C)  $x \in \mathbb{R}, y > -2$       (D)  $x \in \mathbb{R}, -1 < y < 1$
- 15 已知週期為 6 的函數  $f(x) = |x|, -3 < x < 3$ ，展開成  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{3}$ ，下列何者正確？  
 (A)  $a_1 = \frac{6}{\pi^2}$       (B)  $a_3 = \frac{2}{3\pi^2}$       (C)  $a_5 = -\frac{8}{25\pi^2}$       (D)  $a_7 = -\frac{12}{49\pi^2}$
- 16 函數  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$  之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為下列何者？  
 (A)  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin w}{w}$       (B)  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin w}{w}$       (C)  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos w}{w}$       (D)  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos w}{w}$
- 17 下列那個函數 ( $t$  為獨立變數) 無拉氏轉換 (Laplace transform)？  
 (A)  $\sqrt{\frac{t}{\pi}}$       (B)  $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$       (C)  $\frac{\sin t}{t}$       (D)  $\frac{1}{t}$
- 18 假設  $X$  為一離散隨機變數 (discrete random variable)，其值為  $-2$ 、 $1$  與  $3$  的機率分別為  $P(X = -2) = 0.4$ 、 $P(X = 1) = 0.5$  與  $P(X = 3) = 0.1$ 。則期望值  $E[2X^2 + 1] = ?$   
 (A) 5      (B) 6      (C) 7      (D) 8
- 19 某間製造公司專門生產發電機，在甲、乙、丙三地各有一間工廠，各工廠產量分別占總產量的 40%(甲)、25%(乙)、35%(丙)，各工廠生產產品的不合格率分別為 3%(甲)、2%(乙)、4%(丙)，則整間公司發電機產品的不合格率為？  
 (A) 2.5%      (B) 3.2%      (C) 3%      (D) 3.1%
- 20 設  $X$ 、 $Y$  及  $Z$  為三個隨機變數，且聯合機率密度函數為  $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y, z \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，請決定  $X \geq 3Y \geq 5Z$  的機率為何？  
 (A)  $\frac{1}{40}$       (B)  $\frac{3}{40}$       (C)  $\frac{5}{40}$       (D)  $\frac{7}{40}$

# 測驗式試題標準答案

考試名稱：112年特種考試地方政府公務人員考試

類科名稱：電子工程、電力工程

科目名稱：工程數學（試題代號：7344）

單選題數：20題

單選每題配分：2.50分

複選題數：

複選每題配分：

標準答案：

題號	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	第7題	第8題	第9題	第10題
答案	B	A	C	A	C	C	D	A	D	B

題號	第11題	第12題	第13題	第14題	第15題	第16題	第17題	第18題	第19題	第20題
答案	B	D	C	C	D	B	D	C	D	A

題號	第21題	第22題	第23題	第24題	第25題	第26題	第27題	第28題	第29題	第30題
答案										

題號	第31題	第32題	第33題	第34題	第35題	第36題	第37題	第38題	第39題	第40題
答案										

題號	第41題	第42題	第43題	第44題	第45題	第46題	第47題	第48題	第49題	第50題
答案										

題號	第51題	第52題	第53題	第54題	第55題	第56題	第57題	第58題	第59題	第60題
答案										

題號	第61題	第62題	第63題	第64題	第65題	第66題	第67題	第68題	第69題	第70題
答案										

題號	第71題	第72題	第73題	第74題	第75題	第76題	第77題	第78題	第79題	第80題
答案										

題號	第81題	第82題	第83題	第84題	第85題	第86題	第87題	第88題	第89題	第90題
答案										

題號	第91題	第92題	第93題	第94題	第95題	第96題	第97題	第98題	第99題	第100題
答案										

備註：